# Derivator och integraler

Skattning av derivator och integraler

Richardson extrapolation

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

## Några tillämpningar (derivataskattning)

Edge detectors (bildbehandling)

- Pixels där brightness -funktionen abrupt ändrar värde
- Används för att identifiera konturer i bilder

Numerisk lösning av diff.ekvationer

Newtons metod/Optimering

- Jakobianen inte tillgänglig analytiskt



## Numeriska derivator

Ett exempel

- Funktionen f(t) returnerar avståndet en bil kört vid tidpunkten t. Vilken är hastighten och accelarationen vid tidpunkt $t_0$?
- $f'(t_0)$ och $f''(t_0)$ är ofta inte tillgängliga

Lösning:

- Approximera $f'(t_0)$ genom att använda värden i punkter kring $t_0$: Numerisk derivering.



## Skattning av derivator

- Problem att skatta derivator för en funktion som bara är känd i vissa punkter
- Ta funktionen

$$D(h) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

nu gäller $\lim_{h\to 0} D(h) = f'(t)$



## Skattning av derivator

- Centraldifferens

$$D(h) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

- Framåtdifferens

$$D(h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

- Bakåtdifferens

$$D(h) = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$



## Noggrannhet

- Taylorutveckling ger

$$f(t_0+h) = f(t_0) + hf'(t_0) + \frac{h^2}{2} f''(t_0) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(t_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(t_0) + \dots$$

$$f(t_0-h) = f(t_0) - hf'(t_0) + \frac{h^2}{2} f''(t_0) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(t_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(t_0) - \dots$$

vilket kan avändas som bevis för att

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0) + O(h)$$

$$\frac{f(t_0) - f(t_0-h)}{h} = f'(t_0) + O(h)$$

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0-h)}{2h} = f'(t_0) + O(h^2)$$

## Andraderivatan

- På samma vis får vi att andraderivatan

$$f''(h) \approx \frac{f(t-h) - 2f(t_0) + f(t-h)}{2h^2} + O(h^4)$$

7


Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Exempel med centraldifferens

- Skatta derivatan till $f(x) = \sin(x)$ i punkten $x=\pi/4$

$$D(h) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + h) - \sin(\frac{\pi}{4} - h)}{2h}$$

- Beräkna $D(h)$ när $h=1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-10}$

8


Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Exempel

| *h* | *D(h)* | *D(h)-cos(x)* |
|---|---|---|
| 1 | 0.59500983952939 | -0.11209694165716 |
| 0.1 | 0.70592885899994 | -0.00117792218661 |
| 0.01 | 0.70709499613245 | -0.00001178505410 |
| E-3 | 0.70710666333546 | -0.00000011785109 |
| E-4 | 0.70710678000852 | -0.00000000117803 |
| E-5 | 0.70710678117258 | -0.00000000001396 |
| E-6 | 0.70710678123920 | 0.00000000005265 |
| E-7 | 0.70710678090613 | -0.00000000028042 |
| E-8 | 0.70710678978791 | 0.00000000860137 |
| E-9 | 0.70710676203234 | -0.00000001915421 |
| E-10 | 0.70710715061040 | 0.00000036942385 |

9


Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Mindre $h$ - mindre fel ?

- när $h$ blir litet riskeras kancellation i täljaren

10


Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Richardsonextrapolation

- Kan vi eliminera fler feltermer utan att minska $h$?

11


Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Tillämpningsområden

RE kan t.ex. användas i samband med:

- Derivator
- Integraler
- ODE

12


Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Exempel med centraldifferens

- Skatta derivatan till $f(x) = \sin(x)$ i punkten $x = \pi/4$

$$D(h) = \frac{\sin(\pi/4 + h) - \sin(\pi/4 - h)}{2h}$$

- Eftersom derivatorna inte beror av $h$ sätter vi dessa uttryck som konstanter

$$E_{\text{trunk}} = D(h) - f'(x) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \ldots$$

13

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Försök till att minimera $E_{\text{trunk}}$

$$\begin{cases} D(h) = \dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0 - h)}{2h} \\ E_{\text{trunk}} = D(h) - f'(x) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \ldots \\ F_1(h) = D(h) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F_1(h) = f'(t) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots$$

14

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Eliminering av $a_1 h^2$

$$F_1(2h) - F_1(h) = f'(t) + a_1(2h)^2 + a_2(4h)^4 + \ldots - f'(t) - a_1 h^2 - a_2 h^4 + \ldots$$
$$= (2^2 - 1) a_1 h^2 + O(h^4)$$
$$a_1 = \frac{F_1(2h) - F_1(h)}{(2^2 - 1) h^2} + O(h^2)$$
$$\Downarrow$$
$$E_{\text{trunk}} = F_1(h) + \frac{F_1(h) - F_1(2h)}{(2^2 - 1)} - f'(h) = b_1 h^4 + b_2 h^6 + \ldots$$
$$F_2(h) = F_1(h) + \frac{F_1(h) - F_1(2h)}{3}$$
$$F_2(h) = f'(h) + b_1 h^4 + b_2 h^6 \ldots$$

15

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Eliminering av $b_1 h^4$

$$F_2(2h) - F_2(h) = f'(t) + b_1(2h)^4 + b_2(4h)^6 + \ldots - f'(t) - b_1 h^4 - b_2 h^6 + \ldots$$
$$= (2^4 - 1) b_1 h^4 + O(h^6)$$
$$b_1 = \frac{F_2(2h) - F_2(h)}{(2^4 - 1) h^4} + O(h^4)$$
$$\Downarrow$$
$$E_{\text{trunk}} = F_2(h) + \frac{F_2(h) - F_2(2h)}{(2^4 - 1)} - f'(h) = c_1 h^6 + c_2 h^8 + \ldots$$
$$F_3(h) = F_2(h) + \frac{F_2(h) - F_2(2h)}{15}$$
$$F_3(h) = f'(h) + c_1 h^6 + c_2 h^8 \ldots$$

16

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Eliminering av $c_1 h^6$

$$F_3(2h) - F_3(h) = f'(t) + c_1(2h)^6 + c_2(4h)^8 + \ldots - f'(t) - c_1 h^8 - c_2 h^8 + \ldots$$
$$= (2^6 - 1) c_1 h^6 + O(h^8)$$
$$c_1 = \frac{F_3(2h) - F_3(h)}{(2^6 - 1) h^6} + O(h^6)$$
$$\Downarrow$$
$$E_{\text{trunk}} = F_3(h) + \frac{F_3(h) - F_3(2h)}{(2^6 - 1)} - f'(h) = d_1 h^8 + d_2 h^{10} + \ldots$$
$$F_4(h) = F_3(h) + \frac{F_3(h) - F_3(2h)}{63}$$
$$F_4(h) = f'(h) + d_1 h^8 + d_2 h^{10} \ldots$$

OSV...

17

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Generellt

$$a_1 = F_1(h) + \frac{F_1(h) - F_1(qh)}{q^p - 1} + O(h^r)$$
$$= F_2(h) + O(h^r)$$

18

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

## Räkneschema för exemplet

| H | F(h) | Δ/3 | $F_2$ | Δ/15 | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.9501e-01 | | | | |
| | | 2.7667e-02 | | | |
| 0.5 | 6.7801e-01 | | 7.0568e-01 | | |
| | | 7.2513e-03 | | 8.9236e-05 | |
| $2^{-2}$ | 6.9976e-01 | | 7.0702e-01 | | 7.0710e-01 |
| | | 1.8342e-03 | | 5.7097e-06 | |
| $2^{-3}$ | 7.0527e-01 | | 7.0710e-01 | | 7.0711e-01 |
| | | 4.5991e-04 | | 3.5895e-07 | |
| $2^{-4}$ | 7.0665e-01 | | 7.0711e-01 | | 7.0711e-01 |

19 Teknisk-vetenskapliga beräkningar — Pedher Johansson, Department of Computing Science, Umeå University

## Felen i extrapolationerna

- trunkeringsfelet i $F_1(h)$ är proportionellt mot $h^2$
  - skattas med Δ/3
- trunkeringsfelet i $F_2(h)$ är proportionellt mot $h^4$
  - skattas med Δ/15
- För specialfallet $q = 2$ och $p_i = 2i$ kan man visa att $|E_D| \le 2E_f$

20 Teknisk-vetenskapliga beräkningar — Pedher Johansson, Department of Computing Science, Umeå University

## När är vi nöjda?

- Korrektionerna eliminerar ett trunkeringsfel prop. mot $h^2$ och $h^4$
  - dessa bör avta nedåt i kolumnen successivt med faktorn $2^2$ och $2^4$
- När detta beteende upphör inverkar andra fel än trunkeringsfel
- om $h$ litet är differensen mellan två närliggande kolumn-värden en övre gräns för trunkeringsfelet

21 Teknisk-vetenskapliga beräkningar — Pedher Johansson, Department of Computing Science, Umeå University

## Ett exempel

| *T* | *f(t)* |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3.61 |
| 2 | 7.22 |
| 3 | 10.10 |
| 4 | 12.50 |
| 5 | 14.62 |
| 6 | 16.60 |
| 7 | 18.06 |
| 8 | 19.54 |
| 9 | 20.28 |

- Bestäm *f'(4)* med centraldifferens

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Undersök vilka $h$ som är möjliga…..
  *h=1* går bra : punkterna *4-1* och *4+1* finns
  *2h=2* går bra : punkterna *2* och *6* finns

  indikerar *q=2*, så kolla om *4h* är ok
  *4h=4* går bra : punkterna *0* och *8* finns

22 Teknisk-vetenskapliga beräkningar — Pedher Johansson, Department of Computing Science, Umeå University

## Bilda *D(h)*

| *T* | *f(t)* |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3.61 |
| 2 | 7.22 |
| 3 | 10.10 |
| 4 | 12.50 |
| 5 | 14.62 |
| 6 | 16.60 |
| 7 | 18.06 |
| 8 | 19.54 |
| 9 | 20.28 |

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$h = 1: \quad D(h) = \frac{f(5) - f(3)}{2} = 2.26$$

$$h = 2: \quad D(h) = \frac{f(6) - f(2)}{4} = 2.345$$

$$h = 4: \quad D(h) = \frac{f(8) - f(0)}{8} = 2.4425$$

23 Teknisk-vetenskapliga beräkningar — Pedher Johansson, Department of Computing Science, Umeå University

## …extrapolationen

$\approx konst \cdot h^2$ $\approx konst \cdot h^4$

| H | $F_1$ | Δ/3 | $F_2$ | Δ/15 | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2.4425 | | | | |
| | | -0.0325 | | | |
| 2 | 2.345 | | 2.3125 | | |
| | | -0.02833.. | | -0.00538 | |
| 1 | 2.26 | | 2.23166.. | | 2.22627 |

- Vi vet att Δ/3 bör minska med en faktor 4 (ty $h$ minskar med en faktor 2), så välj $F_2(2)=2.3125$ som approx. till $f'(4)$
- $E_{trunk}$ begränsas av "två närliggande värden i samma kolumn"
  $|E_{trunk}| \le |2.4425 - 2.345| = 0.0975$

24 Teknisk-vetenskapliga beräkningar — Pedher Johansson, Department of Computing Science, Umeå University

**4**

## Richardson

Allmänt gäller:

- $\mathrm{F}(h)$ beräknas för steglängder $h, qh, q2h, \ldots$ dvs. en fast kvot mellan successiva steglängder
- vi känner trunkeringsfelet i $\mathrm{F}(h)$

  $F(h) = F(0) + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \ldots$

  $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ kända



## Derivatan approximation med framåtdifferens

- $$f'(x) \approx D_+(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  ty

  $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots$$

  jämför med

  $$F(h) = F(0) + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \ldots$$



## Vad blir korrektionstermerna?

- Allmänt utseende

  $$\frac{\Delta}{q^{p_i} - 1}$$

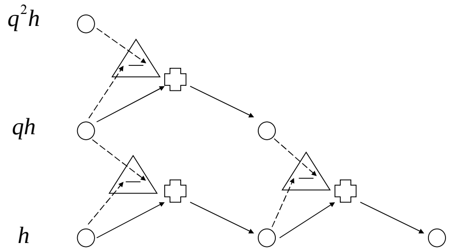
  där $q$ är kvoten mellan successiva $h$-värden och $p_i$ är potenserna i felutvecklingen till differensapproximationen

  $$F(h) = F(0) + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \ldots$$



## Räkneschemat

$h \quad F_1(h) \quad \frac{\Delta}{(q^{p_1} - 1)} \quad F_2(h) \quad \frac{\Delta}{(q^{p_2} - 1)} \quad F_3(h)$






## Numerisk integration

- Nu vill vi approximera

  $$\int_a^b f(x)\partial x$$

Varför ?

- $f(x)$ känd punktvis
- $f(x)$ given, saknar primitiv funktion, t.ex. $\int_0^1 e^{-x^2}\partial x$
- $f(x)$ för arbetskrävande



## Approximera $\int_a^b f(x)\partial x$

- Approximera $f(x)$ med en funktion som är lätt att integrera

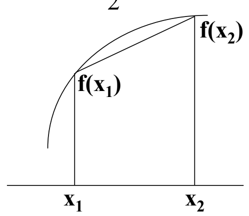
  **Polynom**

- ett polynom med högt gradtal
  - Runges fenomen
- olika polynom av lågt gradtal på delintervall

## Enkel ansats

**Approximera med rät linje**

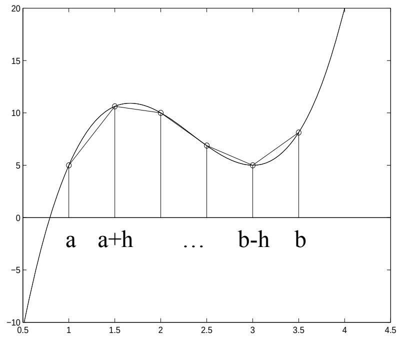
$$\text{Ytans area} = \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_2)) \cdot (x_2 - x_1)$$




Parallelltrapets



## Mindre delintervall






## På mindre delintervall

$x_{i+1} - x_i = h$ ger att

$$\int_a^b f(x)\partial x \approx \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)\cdot h + \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\cdot h + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2}\left(f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right)\cdot h + \frac{1}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)\cdot h =$$

$$= h\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right)$$

Trapetsregeln



## Svårigheter

- Framgången för Richardsonextrapolation beror av hur väl integranden lokalt approximeras av polynom
- Det kan vara både lämpligt och nödvändigt att förbehandla integranden
  - när integranden har en singularitet (inte är deriverbar)
  - när någon av de första derivatorna blir oändlig i någon punkt i integrationsintervallet



## Serieutveckling

$$I = \int_0^{0.5} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \partial x$$

*x=0* singularitet
Trapetsregeln kan ej anv.

Taylorutveckla $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - + \ldots..\right) =$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{2!} - \frac{x^{\frac{11}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{15}{2}}}{4!} \ldots$$



## Integrera

$$I = \left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9\cdot 2!}x^{\frac{9}{2}} - \frac{2}{13\cdot 3!}x^{\frac{13}{2}} + \frac{2}{17\cdot 4!}x^{\frac{17}{2}} \ldots\right]_0^{0.5} =$$

$$= \left[2x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{9\cdot 2!}x^4 - \frac{1}{13\cdot 3!}x^6 + \frac{1}{17\cdot 4!}x^8 \ldots\right)\right]_0^{0.5}$$

$$I = 2\cdot 0.5^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{5}0.5^2 + \frac{1}{18}0.5^4 - \frac{1}{78}0.5^6 + \frac{1}{408}0.5^8 \ldots\right)$$

## …serieutveckling

- Hur många termer ska tas med ?
- Serien är alternerande och $|a_i|$ avtagande
  - $E_{trunk}$ kan skattas med första försummade term

$$2 \cdot 0.5^{\frac{1}{2}} \frac{1}{408} 0.5^8 \approx 1.4 \cdot 10^{-5}$$

$$S_4 = 2 \cdot 0.5^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{5} 0.5^2 + \frac{1}{18} 0.5^4 - \frac{1}{78} 0.5^6) = 1.34813005$$

37



## Då kan vi extrapolera

- De tillgängliga punkterna kring x avgör vilka h som kan komma ifråga, kvoten mellan h-värdena = q
- Korrektionstermerna : $\Delta / (q^{p_i} - 1)$
- En korrektion eliminerar ett trunkationsfel prop. mot $q^{p_i}$ och skall därför avta med en faktor $h^{p_i}$

38



## Exempel: Trapetsregeln

$$T(h) = h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + \frac{1}{2} f(x_n)\right]$$

- Exempel : Använd trapetsregeln för att med $h = 0.25$ beräkna $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \partial x$

$$T(0.25) = h\left[\frac{1}{2} 1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right]$$

39



## exemplet igen $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \partial x$

- Trapetsregeln för $h = 1, 0.5, 0.25$ och Richardson

| H | T(h) | Δ/3 | $F_2$ | Δ/15 | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.75 | | | | |
| | | -0.013899 | | | |
| 0.5 | 0.708333 | | 0.694444 | | |
| | | -0.003770 | | -0.000064 | |
| 0.25 | 0.697024 | | 0.693254 | | 0.693188 |

$$|F_2(0.25) - F_2(0.5)| = 0.00119 = 0.119 \cdot 10^{-2}$$

- exakta felet : $F_3(0.25) - \ln 2 \approx 0.4e-4$

40



## Felen $E_{trunk}$ och $E_{tab}$

- $E_{trunk}$ = "skillnaden mellan den valda approximationen och värdet närmast ovanför i samma kolumn"
- $E_{tab}$ : Antag att $|\bar{f} - f| \le E_f$

$$|\bar{T}(h) - T(h)| \le h\left[\frac{1}{2}|\bar{f}_0 - f_0| + |\bar{f}_1 - f_1| + \ldots |\bar{f}_{n-1} - f_{n-1}| + \frac{1}{2}|\bar{f}_n - f_n|\right] \le$$

$$\le h\left[\frac{1}{2}E_f + E_f + \ldots + E_f + \frac{1}{2}E_f\right] = h \cdot n \cdot E_f = (b-a) \cdot E_f$$

$$|E_{tab}| \le (b-a) \cdot E_f$$

41



## Titta på felet

| H | T(h) | T(h) - ln2 | felet/$h^2 \approx c_1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.75 | 0.056853 | 0.569 |
| 0.5 | 0.708333 | 0.012186 | 0.487 |
| 0.25 | 0.697024 | 0.003877 | 0.620 |
| 0.125 | 0.69412185 | 0.000975 | 0.624 |

- $T(h) - \ln 2$ prop. mot $c_1 h^2$, här fås $c_1 \approx 0.06$

42

## Utan extrapolation…

- För att få felet 0.4e-4 måste $0.06 \cdot h^2 \approx 0.4e\text{-}4$ gälla, dvs $h \approx 0.025$
- Detta ger minst 40 intervall i trapetsformeln
  - $f(x)$ beräknas i minst 41 punkter!
- Jämför med extrapolationen
  - 5 funktionsvärden och två korrektioner



## Halverade steglängder

- Om kvoten mellan två successiva steglängder är 2 kallas trapetsformeln med tillhörande Richardson-extrapolation

**Rombergs metod**